Funciones, x, y, gráficos

Vamos a ver los siguientes temas: funciones, definición, dominio, codominio, imágenes, gráficos, y algo más.

Recordemos el concepto de **función**:

Una **función** es una relación entre dos conjuntos de cosas, personas, equipos, números.

Desde un punto de vista formal, se dice que *f* es una **función** o **aplicación** de A en B y se denota

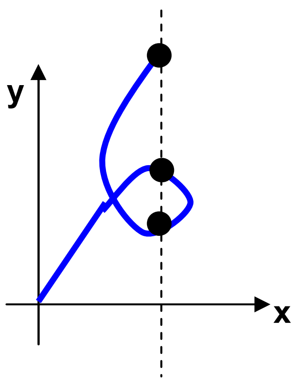
$$f : A \rightarrow B$$

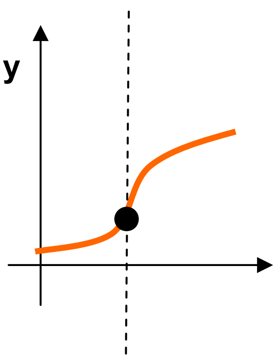
Para que una relación entre dos conjuntos A y B sea una función escalar de A en B, siendo A y B números reales, deben cumplirse dos condiciones:

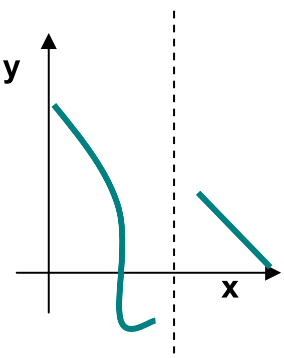
***Existencia*: cualquiera sea x de A , existe y de B tal que y = f(x).**

Unicidad:* si** $f(x) = y_1$ ***y $f(x) = y_2$ ***entonces*** $y_1 = y_2$

Observá atentamente los gráficos de las siguientes curvas, tratá de descubrir las similitudes y las diferencias. Después tratá de decir cuál de ellas crees que verifica la definición de función dada arriba.







x

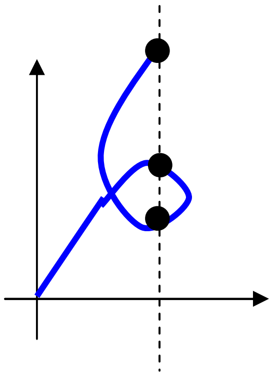
x = a **x = a** **x = a**

Te ayudo aclarando los conceptos de **“unicidad”** y **“existencia”.**

La **“unicidad”** significa que para todas las “x” hay un solo resultado, o dicho de otro modo a cada valor de “x” le corresponde un solo punto en la curva.

La **“existencia”** significa que todas las “x” deben tener un punto en la curva, si hay alguna “x” que no lo tiene entonces no es función.

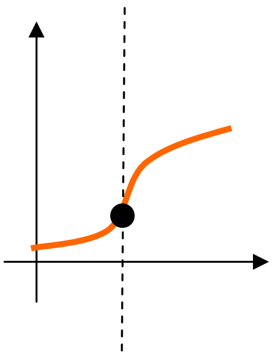
Tratá de responder antes de seguir leyendo.



No es función

Al mover una recta paralela al eje "**y**" (vertical) observamos que corta la curva en un punto, en dos puntos y cuando x = a en tres, luego podemos decir que no cumple la condición de unicidad porque cuando x = a tiene tres imágenes (resultados).

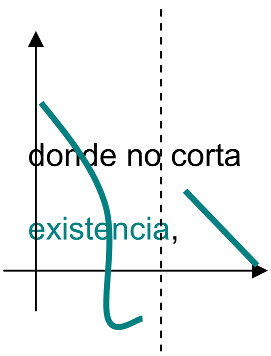
x = a



Es función

Al mover una recta vertical paralela al eje **"y"** corta al gráfico en un solo punto, por que cumple la condición de unicidad. Y además, cada **x** tiene imagen, es decir verifica la condición de existencia.

x = a



NO es función

Al mover la recta vertical hay un intervalo donde no corta al gráfico, es decir no cumple la condición de existencia,

solo punto

aunque como cuando la corta lo hace en un decimos que verifica la unicidad.

x = a

La única que resultó cumplir las condiciones de “existencia” y “unicidad” fue la curva roja.

Esto significa que a cada elemento *a* de A, le corresponde por *f* un elemento *b*, y solo uno, de B, al que se denomina **imagen** de *a* por *f* y que se denota $f(a) = b$.

Recordemos el concepto de **dominio:**

El **dominio** es el conjunto valores numéricos que puede tomar la “x”.

Analicemos algunos ejemplos:

Si tenemos $f(x)=x^2+1$, la “x” puede ser cualquier número, porque a todo número lo podemos elevar al cuadrado y sumarle 1, entonces decimos que su dominio son todos los números reales Y escribimos su dominio es $\Re$.

Si tenemos $f(x) = 3x - 5$, la “x” también puede tomar cualquier valor numérico, porque a todo número real lo podemos multiplicar por 3 y restarle 5, su dominio son todos los reales. Y escribimos su dominio es $\Re$.

Si tenemos $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nos aparece un problemita, ya la “x” no puede valer 1, porque haría que el denominador fuera igual a 0, y no podemos dividir por 0, por definición de división. Sin embargo cualquier otro número sí podemos atribuirle a la “x”. Por lo tanto decimos que su dominio son todos los reales menos el 1 y escribimos su dominio es $\Re - \{1\}$

Recordemos el concepto de **codominio:**

El **codominio** es el conjunto de valores donde pueden estar los resultados.

Por ejemplo si $f(x)=x^2+1$ los resultados serán siempre números reales.

Si $f(x) = 3x - 5$ los resultados serán siempre números reales.

Si $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ los resultados serán siempre números reales.

Es decir el codominio de funciones con números será los reales.

Recordemos el concepto de **imagen**:

Mientras que el **codominio** es el conjunto de valores donde pueden estar los resultados, la **imagen** es el conjunto de resultados.

Tratemos de aclarar esto con los ejemplos anteriores,

$f(x)=x^2+1$ el codominio es $\Re$, pero sus resultados siempre serán mayores que 1. Construyamos una tabla con valores de “x” y sus resultados:

x	$y = f(x) = x^2+1$
0	$0^2+1=1$
2	$2^2+1=5$
-2	$(-2)^2+1=5$
4	$4^2+1=17$
-4	$(-4)^2+1=17$

Cuando “x” toma un valor positivo o negativo, al elevar al cuadrado dará siempre positivo, si le sumamos 1será positivo y además mayor a 1.

Entonces la **imagen** son los reales mayores o iguales a 1

$f(x)=3x-5$ el codominio también es $\Re$, construyamos una tabla con valores:

x	y = f(x) = **3x-5**
0	3.0-5=-5
2	3.2-5=1
-2	3.(-2)-5=-11
4	3.4-5=7
-4	3.(-4)-5=-17

En esta función tenemos resultados positivos y negativos, entonces podemos decir que la **imagen** son todos los reales.

Te recuerdo que el **gráfico** es la representación en los ejes cartesianos, es decir en el plano, donde representamos el **dominio** sobre el eje “x” y la **imagen** sobre el eje “y”.

Las funciones deben cumplir los requisitos de "unicidad" y "existencia", pero si además cumplen otras condiciones podemos clasificar las funciones según estos, (no te asustes por los nombres que reciben):

Clasificación de funciones:

- **Función inyectiva: una función *f* es inyectiva si y sólo si dos x distintas tienen resultados distintos.**

Analicemos las mismas funciones:

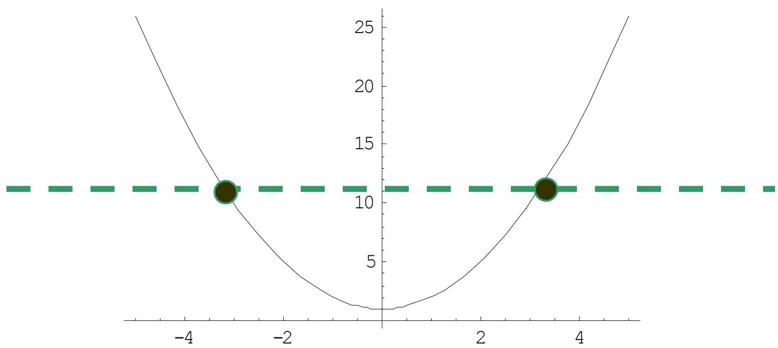
$f(x)=x^2+1$ cuando $x = 2 \rightarrow f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

y cuando $x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

encontramos dos "x" distintas que tienen el mismo resultado, por lo tanto al definir la función $\Re \rightarrow \Re : f(x)=x^2+1$ no es inyectiva.

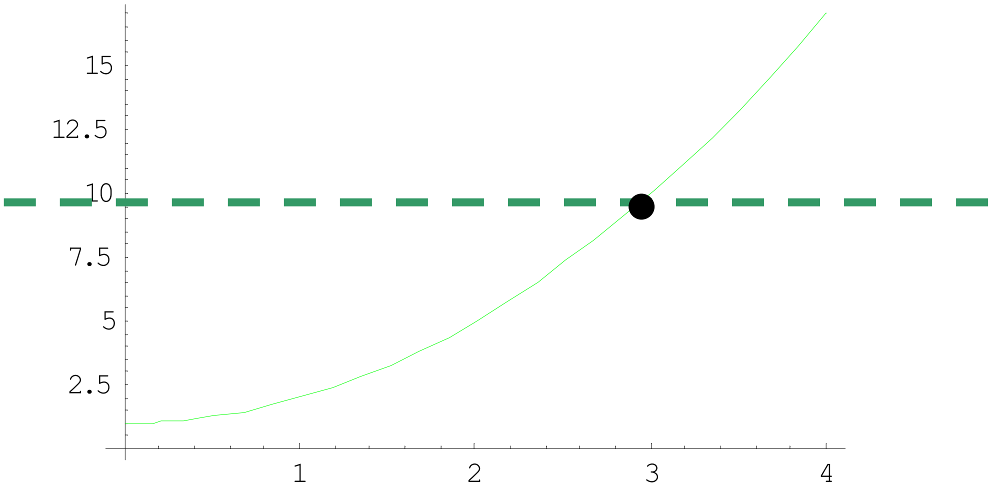
Observemos el gráfico para tratar de interpretar estas características de un modo sencillo:

x	$y = f(x) = x^2 + 1$
0	$0^2 + 1 = 1$
2	$2^2 + 1 = 5$
2	$(-2)^2 + 1 = 5$
4	$4^2 + 1 = 17$
-4	$(-4)^2 + 1 = 17$



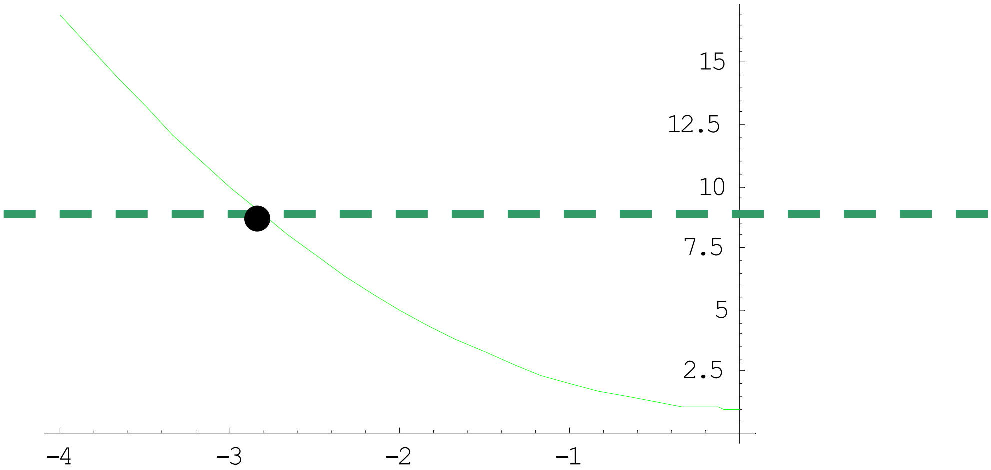
Al cortar la gráfica con una recta paralela al eje "x" la tocamos en dos puntos, lo que nos dice que la función no es inyectiva.

Si en cambio elegimos como **dominio** sólo los números positivos, es definirla de $\Re^+ \rightarrow \Re : f(x)=x^2+1$ tendrá como gráfico:



Al cortar la gráfica con una recta paralela al eje "x" la tocamos en un solo punto, lo que nos dice que la función es inyectiva.

Si en cambio elegimos como **dominio** sólo los números positivos, es definirla de $\Re^{-} \rightarrow \Re : f(x)=x^{2}+1$ tendrá como gráfico:



Al cortar la gráfica con una recta paralela al eje "x" la tocamos en un solo punto, lo que nos dice que la función es inyectiva.

Ahora, estudiemos la otra función,

$f(x) = 3x - 5$ cuando $x = 2 \rightarrow f(2) = 3.2 - 5 = 1$

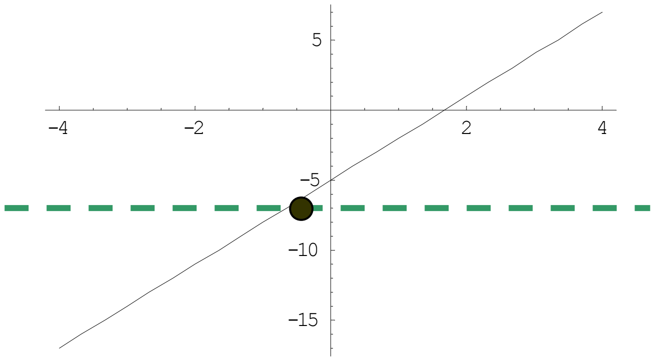
y cuando $x = -2 \rightarrow f(-2) = 3.(-2) - 5 = -6 - 5 = -11$

encontramos que dos x distintas tienen con resultados distintos, la función es inyectiva.

¡Ojo lo anterior no es una demostración!, sino simplemente un ejemplo.

Observemos el gráfico para tratar de interpretar estas características de un modo sencillo:

x	$y = f(x) = 3x-5$
0	$3.0-5 = -5$
2	$3.2-5 = 1$
-2	$3.(-2)-5 = -11$
4	$3.4-5 = 7$
-4	$3.(-4)-5 = -17$



Al cortar la gráfica con una recta paralela al eje "x" la tocamos siempre en un solo punto, lo que nos dice que la función es inyectiva.

- **Función suryectiva o sobreyectiva: cuando las imágenes coinciden con el codominio.**

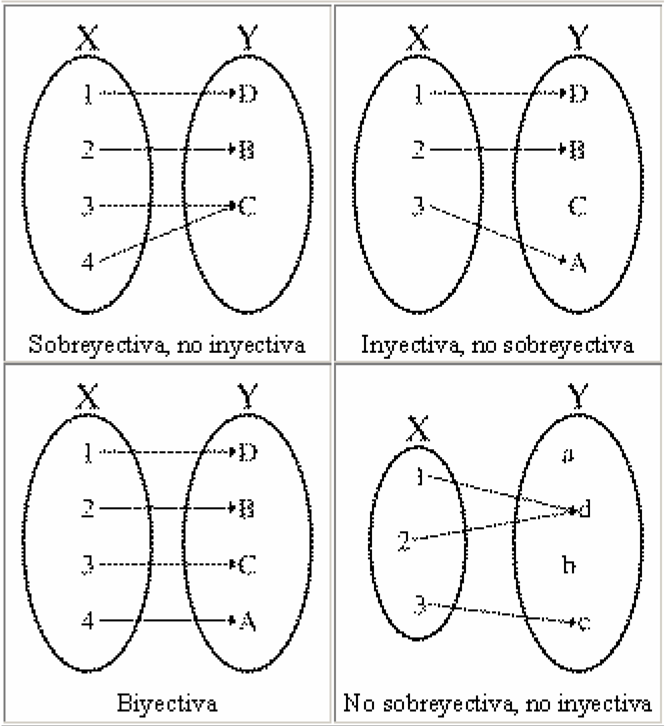
Por ejemplo: si definimos las funciones anteriores de Reales en Reales, lo que simboliza: $f : \Re \to \Re / f(x) = x^2 + 1$ podemos decir (observá el gráfico), que como ningún número negativo será resultado esta función definida así no es sobreyectiva. Por que todos los resultados serán siempre números mayores o iguales a 1, las **imágenes** serán mayores a 1 y hasta el infinito pero jamás serán negativos.

En cambio, $f : \Re \to \Re / f(x) = 3.x - 5$ los resultados serán todos los números negativos y positivos desde el menos infinito hasta el más infinito. Luego, esta función es sobreyectiva.

- **Función biyectiva: Cuando una función es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente se dice que es biyectiva.**

Como ejemplo la $f : \Re \to \Re / f(x) = 3.x - 5$ es biyectiva. Más adelante en tus estudios verás que ser biyectiva es importante porque asegura que la función admita inversa.

Observemos cómo se ven estas clasificaciones en otro tipo de gráfico llamado **diagrama de Venn:**



NOTA: para que una función sea biyectiva debe salir una y sólo una flecha de cada uno de los elementos del Dominio e ir a parar a distintos elementos del Codominio. No puede quedar ningún elemento del Dominio sin pareja, y ningún elemento del Codominio sin ser pareja de alguno del Dominio.